Lois à densité
Corrigés de quelques exemples
Terminale S 731

Frédéric Junier[1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Exemple 13

Soit X une variable aléatoire suivante une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ 4)$.
On a $4 = \sigma^2$ donc $\sigma = 2$ car $\sigma \geqslant 0$.

1. Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X.
   Par définition, Z suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
2. Calculons la valeur de μ telle que $\mathrm{P}(X < 100) = 0,001$.

$$\mathrm{P}(X < 100) = 0,001 \Longleftrightarrow \mathrm{P}\left(Z < \frac{100-\mu}{2}\right) = 0,001$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,001)$ le réel u tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant u) = 0,001$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.
On en déduit que :

$$\frac{100-\mu}{2} = \Psi(0,001) \Longleftrightarrow \mu = 100 - 2\Psi(0,001) \approx \boxed{106,180}$$

Exemple 14 Questions 1) et 2)

- X est la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type $1,6$.
- Y est la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ.

1. $\mathrm{P}(6,5 \leqslant X \leqslant 9,6) \approx \boxed{0,683}$
2. $\mathrm{P}(X \leqslant 6,5) \approx \boxed{0,174}$

Exemple 14 Question 3)

3. Déterminons σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est $0,1$.
Y suit la loi $\mathcal{N}\left(9\ ;\ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

$$\mathrm{P}(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \iff \mathrm{P}(Z \leqslant \frac{6,5-9}{\sigma}) = 0,1 \iff \mathrm{P}(Z \leqslant \frac{-2,5}{\sigma})$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,1)$ le réel u tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant u) = 0,1$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.
On en déduit que :

$$\frac{-2,5}{\sigma} = \Psi(0,1) \iff \sigma = \frac{-2,5}{\Psi(0,1)} \approx \boxed{1,951}$$

Exemple 15 Question 1 Partie 1

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. X suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(120 \leqslant X \leqslant 200) = 0,8 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{P}(X \leqslant 200) = 0,85 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{P}\left(Z \leqslant \dfrac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0,85 \\ \mathrm{P}\left(Z \leqslant \dfrac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases}$$

Exemple 15 Question 1 Partie 2

1. On inverse deux fois la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,85)$ le réel u tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant u) = 0,85$ et $\Psi(0,05)$ le réel v tel que $\mathrm{P}(Z \leqslant v) = 0,05$
La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(120 \leqslant X \leqslant 200) = 0,8 \\ \mathrm{P}(X \leqslant 120) = 0,05 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{200-\mu}{\sigma} = \Psi(0,85) \\ \dfrac{120-\mu}{\sigma} = \Psi(0,05) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 200-\mu = \sigma \times \Psi(0,85) \\ 120-\mu = \sigma \times \Psi(0,05) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 200-\sigma \times \Psi(0,85) = \mu \\ 80 = \sigma \times (\Psi(0,85) - \Psi(0,05)) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} \mu \approx 169,08 \\ \sigma \approx 29,84 \end{cases}}$$

Exemple 15 Question 2

2. Calculons la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours :

$$\mathrm{P}\big(200 \leqslant X \leqslant 230\big) \approx \boxed{0,129}$$

Exercice 1 de la fiche de révisions n° 2 (1 / 2)

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(2015\ ;\ \sigma^2\right)$ telle que $\mathrm{P}(1982 \leqslant Y \leqslant 2048) = 0,813$.

Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de σ.

- Y suit la loi $\mathcal{N}\left(2015\ ;\ \sigma^2\right)$ donc $Z = \dfrac{Y - 2015}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
- Calculons la valeur de σ telle que $\mathrm{P}(1982 \leqslant Y \leqslant 2048) = 0,813$.

  $$\mathrm{P}(1982 \leqslant Y \leqslant 2048) = 0,813 \Longleftrightarrow \mathrm{P}\left(-\frac{33}{\sigma} < Z < \frac{33}{\sigma}\right) = 0,813$$

Exercice 1 de la fiche de révisions n° 2 (2 / 2)

- Par propriété de symétrie de la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ on a :

$$\mathrm{P}\big(Z < \frac{33}{\sigma}\big) = \frac{1 + \mathrm{P}\big(-\frac{33}{\sigma} < Z < \frac{33}{\sigma}\big)}{2} = 0,9065$$

On inverse la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et on note $\Psi(0,9065)$ le réel u tel que $\mathrm{P}\big(Z < u\big) = 0,9065$. La fonction Ψ est la fonction `FracNormale` ou `InvNorm` de la calculatrice.
On en déduit que :

$$\frac{33}{\sigma} = \Psi(0,9065) \Longleftrightarrow \sigma = \frac{33}{\Psi(0,9065)} \approx \boxed{25}$$