# 1 La méthode de Cardan pour résoudre $X^3 + pX + q = 0$

Jérôme **Cardan** (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution réelle $\alpha$ de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ dans le cas où $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} \geqslant 0$ :

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

*Pour tout nombre réel a on appelle racine cubique de a et on note $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{\frac{1}{3}}$ l'unique réel qui élevé au cube donne a. Ainsi $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ et $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.*

**1.** Compléter l'algorithme 1 ci-dessous qui prend en entrée les coefficients $p$ et $q$ d'une équation du type $X^3 + pX + q = 0$, puis qui retourne la solution qu'on peut obtenir par la méthode de **Cardan** ou le message "**Cardan** impossible " sinon.

**Algorithme 1**

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
  alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
  delta EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  LIRE q
  delta PREND_LA_VALEUR ..........
  SI (delta>=0) ALORS
    DEBUT_SI
    alpha PREND_LA_VALEUR .................
    AFFICHER alpha
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Méthode de Cardan impossible"
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

**2.** On considère l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$ ($p = -36$ et $q = -91$).

- **a.** Appliquez l'algorithme 1 à cette équation pour déterminer la solution $\alpha$ retournée par la formule de **Cardan**.
- **b.** Déterminer $b$ et $c$ tels que pour tout réel $X$, $X^3 - 36X - 91 = (X - \alpha)(X^2 + bX + c)$.
- **c.** Achever la résolution de l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$ ?

**3.** On considère l'équation (E) : $X^3 - 15X - 4 = 0$ ($p = -15$ et $q = -4$).

**4.** Avec l'algorithme 1, déterminer si on peut appliquer la méthode de **Cardan** à cette équation.

**5.** Conjecturer le nombre solutions de l'équation (E) avec Geogebra.

**6.** Pour résoudre malgré tout cette équation avec sa méthode, **Cardan** utilisait des racines carrés de nombres négatifs.

Plus tard, **Bombelli** (1526-1572), introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons $i$, tel que $i^2 = -1$.

Ainsi dans le cas de l'équation (E), avec $p = -15$ et $q = -4$, on peut écrire $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times i^2 = (11i)^2$.

- En utilisant le nombre $i$, démontrez que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres avec une partie « imaginaire » dont les cubes s'écrivent $2 + 11i$ et $2 - 11i$.

- En utilisant les règles de calcul sur les nombres réels et l'égalité $i^2 = -1$, démontrez que :

$$(2+i)^3 = 2+11i \qquad \text{et} \qquad (2-i)^3 = 2-11i$$

- En déduire que 4 est la solution donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E) et vérifier que 4 est bien solution de l'équation (E).

**7.** Déterminer $b$ et $c$ tels que pour tout réel $X$, $X^3 - 15X - 4 = (X-\alpha)(X^2 + bX + c)$.

**8.** Achever la résolution de l'équation $X^3 - 15X - 4 = 0$.

# 2 Multiplication de deux nombres complexes et puissances itérées

**1.** Ecrire avec Algobox un algorithme 2 qui prend en entrée les parties réelles $a$ et $c$, et imaginaires $b$ et $d$, de deux nombres complexes $a+ib$ et $c+id$ et qui retourne la partie réelle et la partie imaginaire de leur produit $(a+ib)(c+id)$.

**2.** **a.** Compléter l'algorithme 3 ci-contre qui prend en entrée la partie réelle $a$ et la partie imaginaire $b$ d'un nombre complexe $a+ib$ et qui retourne $(a+ib)\times q^n$ où $n$ est un entier naturel et $q = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, en représentant dans le plan les points d'affixes $(a+ib)\times q^k$ pour toute valeur de $k$ comprise entre 0 et $n$.

On note $x$ la partie réelle de $(a+ib)\times q^k$ et $y$ sa partie imaginaire.

**b.** Quel est le rôle de la variable `s` ?

**c.** Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour $k$ variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6, est-ce la peine de continuer ?

On réglera le repère à Xmin=-2, Xmax=2,Ymin=-2 et Ymax=2.

Quelles remarques peut-on faire ?

**d.** Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $i \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour $k$ variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6 ....

Comparer les points obtenus avec ceux de la question précédente. Quelles remarques peut-on faire ?

**e.** Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $(1+i) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour $k$ variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6 ....

Quelles remarques peut-on faire ?

**Algorithme 3**

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  s EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE a
  LIRE b
  x PREND_LA_VALEUR a
  y PREND_LA_VALEUR b
  TRACER_POINT (x,y)
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    s PREND_LA_VALEUR x
    x PREND_LA_VALEUR .............
    y PREND_LA_VALEUR .............
    AFFICHER x
    AFFICHER y
    TRACER_POINT (x,y)
    FIN_POUR
  AFFICHER x
  AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```