

1 La méthode de Cardan pour résoudre $X^3 + pX + q = 0$

Jérôme **Cardan** (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution réelle α de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ dans le cas où $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \geq 0$:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Pour tout nombre réel a on appelle racine cubique de a et on note $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{\frac{1}{3}}$ l'unique réel qui élevé au cube donne a . Ainsi $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ et $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$.

1. Compléter l'algorithme 1 ci-dessous qui prend en entrée les coefficients p et q d'une équation du type $X^3 + pX + q = 0$, puis qui retourne la solution qu'on peut obtenir par la méthode de **Cardan** ou le message "**Cardan impossible**" sinon.

Algorithme 1

```

1  VARIABLES
2  p EST_DU_TYPE NOMBRE
3  q EST_DU_TYPE NOMBRE
4  alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
5  delta EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE p
8  LIRE q
9  delta PREND_LA_VALEUR .....
10 SI (delta >= 0) ALORS
11   DEBUT_SI
12   alpha PREND_LA_VALEUR .....
13   AFFICHER alpha
14   FIN_SI
15 SINON
16   DEBUT_SINON
17   AFFICHER "Méthode de Cardan impossible"
18   FIN_SINON
19 FIN_ALGORITHME

```

2. On considère l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$ ($p = -36$ et $q = -91$).
 - a. Appliquez l'algorithme 1 à cette équation pour déterminer la solution α retournée par la formule de **Cardan**.
 - b. Déterminer b et c tels que pour tout réel X , $X^3 - 36X - 91 = (X - \alpha)(X^2 + bX + c)$.
 - c. Achever la résolution de l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans \mathbb{R} ?
3. On considère l'équation (E) : $X^3 - 15X - 4 = 0$ ($p = -15$ et $q = -4$).
4. Avec l'algorithme 1, déterminer si on peut appliquer la méthode de **Cardan** à cette équation.
5. Conjecturer le nombre solutions de l'équation (E) avec Geogebra.
6. Pour résoudre malgré tout cette équation avec sa méthode, **Cardan** utilisait des racines carrées de nombres négatifs.

Plus tard, **Bombelli** (1526-1572), introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons i , tel que $i^2 = -1$.

Ainsi dans le cas de l'équation (E), avec $p = -15$ et $q = -4$, on peut écrire $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times i^2 = (11i)^2$.

- En utilisant le nombre i , démontrez que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres avec une partie « imaginaire » dont les cubes s'écrivent $2 + 11i$ et $2 - 11i$.

- En utilisant les règles de calcul sur les nombres réels et l'égalité $i^2 = -1$, démontrez que :

$$(2+i)^3 = 2+11i \quad \text{et} \quad (2-i)^3 = 2-11i$$

- En déduire que 4 est la solution donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E) et vérifier que 4 est bien solution de l'équation (E).

7. Déterminer b et c tels que pour tout réel X , $X^3 - 15X - 4 = (X - \alpha)(X^2 + bX + c)$.

8. Achever la résolution de l'équation $X^3 - 15X - 4 = 0$.

2 Multiplication de deux nombres complexes et puissances itérées

1. Ecrire avec Algorithme 2 un algorithme 2 qui prend en entrée les parties réelles a et c , et imaginaires b et d , de deux nombres complexes $a+ib$ et $c+id$ et qui retourne la partie réelle et la partie imaginaire de leur produit $(a+ib)(c+id)$.

2. a. Compléter l'algorithme 3 ci-contre qui prend en entrée la partie réelle a et la partie imaginaire b d'un nombre complexe $a+ib$ et qui retourne $(a+ib) \times q^n$ où n est un entier naturel et $q = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, en représentant dans le plan les points d'affixes $(a+ib) \times q^k$ pour toute valeur de k comprise entre 0 et n .
On note x la partie réelle de $(a+ib) \times q^k$ et y sa partie imaginaire.

b. Quel est le rôle de la variable s ?

c. Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour k variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6, est-ce la peine de continuer ?

On réglera le repère à $X_{\min}=-2$, $X_{\max}=2$, $Y_{\min}=-2$ et $Y_{\max}=2$.

Quelles remarques peut-on faire ?

d. Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $i \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour k variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6

Comparer les points obtenus avec ceux de la question précédente. Quelles remarques peut-on faire ?

e. Tester l'algorithme 3 pour représenter les points d'affixe $(1+i) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour k variant de 0 à 1 puis de 0 à 2, de 0 à 3, de 0 à 4, de 0 à 5, de 0 à 6

Quelles remarques peut-on faire ?

Algorithme 3

```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  k EST_DU_TYPE NOMBRE
5  n EST_DU_TYPE NOMBRE
6  x EST_DU_TYPE NOMBRE
7  y EST_DU_TYPE NOMBRE
8  s EST_DU_TYPE NOMBRE
9  DEBUT_ALGORITHME
10 LIRE n
11 LIRE a
12 LIRE b
13 x PREND_LA_VALEUR a
14 y PREND_LA_VALEUR b
15 TRACER_POINT (x,y)
16 POUR k ALLANT_DE 1 A n
17   DEBUT_POUR
18     s PREND_LA_VALEUR x
19     x PREND_LA_VALEUR .....
20     y PREND_LA_VALEUR .....
21   AFFICHER x
22   AFFICHER y
23   TRACER_POINT (x,y)
24   FIN_POUR
25 AFFICHER x
26 AFFICHER y
27 FIN_ALGORITHME

```