

1 Programmation de $n!$ avec Algobox

On rappelle que pour tout entier naturel n on définit la factorielle de n par :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche $n!$ pour l'entrée d'un entier naturel n :

```

1  VARIABLES
2  fact EST_DU_TYPE NOMBRE
3  n EST_DU_TYPE NOMBRE
4  i EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  LIRE n
7  fact PREND_LA_VALEUR 1
8  POUR i ALLANT_DE 1 A n
9  DEBUT_POUR
10  fact PREND_LA_VALEUR .....
11  FIN_POUR
12  AFFICHER fact
13  FIN_ALGORITHME

```

2 Etude de deux suites avec Algobox

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

- Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les valeurs des n premiers termes des suites (u_n) et (v_n) , où n est un entier supérieur ou égal à 1 :

```

1  VARIABLES
2  fact EST_DU_TYPE NOMBRE
3  u EST_DU_TYPE NOMBRE
4  v EST_DU_TYPE NOMBRE
5  n EST_DU_TYPE NOMBRE
6  i EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  LIRE n
9  fact PREND_LA_VALEUR 1
10  u PREND_LA_VALEUR 1
11  POUR i ALLANT_DE 1 A n
12  DEBUT_POUR
13  fact PREND_LA_VALEUR .....
14  u PREND_LA_VALEUR .....
15  AFFICHER u
16  AFFICHER " et "
17  v PREND_LA_VALEUR .....
18  AFFICHER v
19  FIN_POUR
20  FIN_ALGORITHME

```

2. Tester cet algorithme pour afficher les 20 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation de ces suites ? sur leur convergence ?

3 Etude mathématique

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n \leq v_n$.
2. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est majorée par v_1 . En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que la suite (v_n) est minorée par u_1 . En déduire qu'elle converge.
5. On considère la suite (e_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $e_n = v_n - u_n$.
 - a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $n \times n! \geq n$.
 - b. En déduire la limite de la suite (e_n) et que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Cette limite notée e est le nombre d'Euler.

6. Compléter l'algorithme de seuil ci-dessous pour qu'il affiche des valeurs approchées par défaut u_n et par excès v_n du nombre d'Euler à 10^{-6} près.

```

1  VARIABLES
2  fact EST_DU_TYPE NOMBRE
3  u EST_DU_TYPE NOMBRE
4  v EST_DU_TYPE NOMBRE
5  i EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  fact PREND_LA_VALEUR 1
8  u PREND_LA_VALEUR 2
9  v PREND_LA_VALEUR 3
10 i PREND_LA_VALEUR 1
11 TANT_QUE (v-u>0.000001) FAIRE
12   DEBUT_TANT_QUE
13   i PREND_LA_VALEUR ....
14   fact PREND_LA_VALEUR ....
15   u PREND_LA_VALEUR .....
16   v PREND_LA_VALEUR ...
17   FIN_TANT_QUE
18 AFFICHER u
19 AFFICHER v
20 FIN_ALGORITHME

```