Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{2} - \cos(x)$$

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $f(x) = x$

Pour cela on va considérer la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - f(x)$.

- **a.** Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
- **c.** Justifier que sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.
- **d.** Déduire des questions précédentes que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Justifier que α appartient à l'intervalle $]0,8\,;0,9[$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On admet désormais que (u_n) converge vers α.

4. Justifier qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant 0,9$.

Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine le plus petit indice p tel que $u_p \leqslant 0,9$:

```
VARIABLES
U EST_DU_TYPE NOMBRE
P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  P PREND_LA_VALEUR 0
  U PREND_LA_VALEUR π/2
  TANT_QUE ......... FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR ..........
    P PREND_LA_VALEUR P+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER P
FIN_ALGORITHME
```