1 Etude d'une fonction auxiliaire f et de solutions approchées d'équations par dichotomie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant les calculs de limites aux bornes.

3. Justifier que l'équation (E_1) : $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-2;-1]$ et que c'est même l'unique solution de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$.

4. Appliquer à la main l'algorithme de dichotomie (voir Annexe 1) avec les valeurs initiales $a = -2$ et $b = -1$ pour déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,1$. On complétera le tableau en Annexe 2.
Combien d'étapes sont nécessaires ? Pouvait-on le prévoir ?

5. Télécharger le fichier DICHOTOMIE14ELEVE.ALG sur mon site et compléter l'algorithme de Dichotomie pour cette fonction avec `Algobox`.

6. Tester cet algorithme en partant de $a = -2$ et $b = -1$ pour obtenir un encadrement de α d'amplitude $0,001$.

7. Compléter l'algorithme pour qu'il affiche en sortie le nombre d'étapes nécessaires.

8. Justifier que l'équation (E_2) : $f(x) = 10$ possède une unique solution β sur $]-\infty;+\infty[$ et déterminer le plus grand entier relatif n tel que $n < \beta < n+1$.
Modifier le programme DICHOTOMIE14ELEVE.ALG pour qu'il détermine un encadrement de β d'amplitude saisie par l'utilisateur avec la méthode par dichotomie. Enregistrer le nouveau programme sous le nom DICHOTOMIE14ELEVE2.ALG.

Algorithme 1 *Dichotomie*

Entrée(s) $a, b, precision$
  tant que $|a-b| >$ precision **faire**
    $\dfrac{a+b}{2} \rightarrow m$
    si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
      $m \rightarrow b$
    sinon
      $m \rightarrow a$
    fin du si
  fin du tant que
Sortie(s) a, b

Etape	a	b	m
1			
2			
...			
...			
...			
...			

2 Etude d'une fonction g

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-6x-\dfrac{10}{x}\right)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et démontrer que g' est du même signe que la fonction f étudiée dans la partie A.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction g.
3. Dresser le tableau de variation complet de g en justifiant les calculs de limites aux bornes.
4. Justifier que l'équation (E_2) : $g(x)=0$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$ et déterminer une valeur approchée de cette solution à 0,1 près avec une méthode par balayage. (Détailler les étapes).