Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il retourne le terme de rang n de la suite (u_n) :

Variables :	n est un entier naturel
	i est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 0 à ... :
	| Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Programmer cet algorithme avec Algobox et donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'il affiche lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. **a.** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ sur $[0; 2]$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} \leqslant 2$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice 2

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule les termes de rang n (saisi par l'utilisateur) des suites (u_n) et (v_n) :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $\cdots\cdots\cdots$ à K
	Affecter $\cdots\cdots\cdots$ à W
	Affecter $\cdots\cdots\cdots$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

Programmer cet algorithme avec Algobox puis l'exécuter en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.