**Exercice 1**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2.** Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

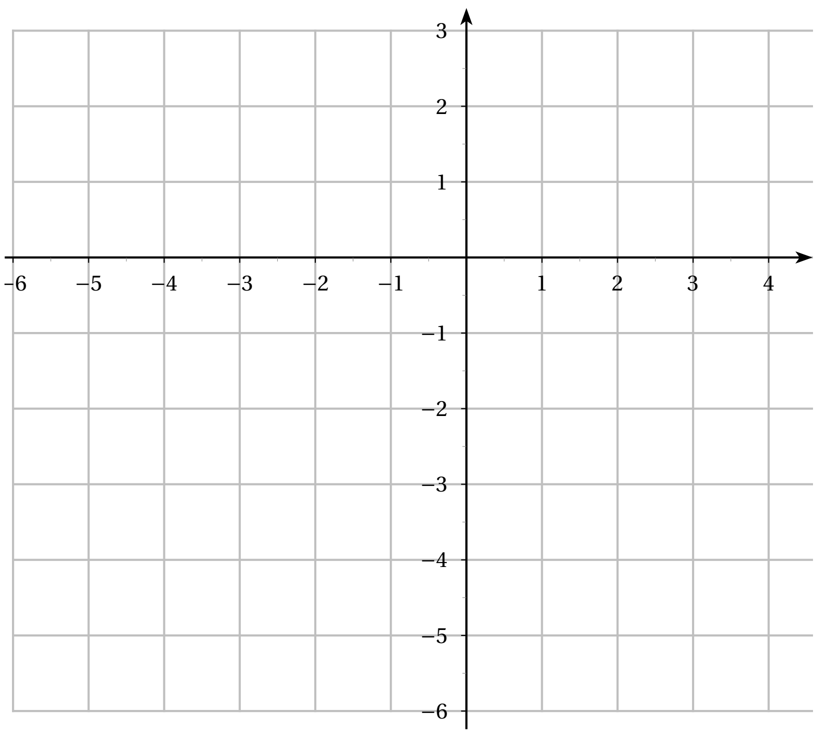
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

- **a.** Compléter le graphique en Annexe 1 avec la représentation graphique $d$ de la fonction $f$ ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
- **b.** En utilisant $d$ et $\Delta$, construire $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$ sur l'axe des abscisses du repère. (*laisser apparaître les traits de construction*) .
- **c.** Ecrire un algorithme en langage naturel qui prend en entrée un entier $n$ et qui affiche en sortie la valeur de $u_n$.
- **d.** Avec la calculatrice (en programmant l'algorithme précédent ou en utilisant le tableur en mode séquentiel), calculer des valeurs décimales approchées à $10^{-7}$ près de $u_8$, $u_{10}$, $u_{15}$, $u_{20}$ et $u_{50}$.
- **e.** Que peut-on conjecturer pour le comportement asymptotique de la suite $(u_n)$ ?

**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n + 3$.

- **a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et calculer son premier terme $v_0$.
- **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $u_n = -3 + \frac{2}{3^{n-1}}$.
- **c.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

## ANNEXE 1



**Exercice 2**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 2^n - 40n - 20$.

1. **a.** En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 6.

   **b.** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 9$ on a $u_n > 0$.

2. On note $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 2^n - 20n^2$.

   **a.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} - v_n = u_n$.

   **b.** En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)$.

   **c.** Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il retourne le plus petit indice $n$ tel que $v_n > 0$.

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE .............. FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR ......
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

**Exercice 3**

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. **a.** Calculer $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

   **b.** Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant n + 3$.

   **b.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

   **c.** En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   **b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

   **c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

   **a.** Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

   **b.** Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.