# 1 Algorithme de dichotomie

**Exercice 1** *Etude d'une fonction auxiliaire $f$ et de solutions approchées d'équations par dichotomie*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

1. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variation complet de $f$ en justifiant les calculs de limites aux bornes.
3. Justifier que l'équation $(E_1)$ : $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $[-2;-1]$ et que c'est même l'unique solution de l'équation $(E_1)$ dans $\mathbb{R}$.
4. Appliquer à la main l'algorithme de dichotomie (voir Algorithme 1) avec les valeurs initiales $a = -2$ et $b = -1$ pour déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0,1$. On complétera le tableau en Annexe 2 avec les valeurs des variables en entrée de la boucle Tant Que.
   Combien d'étapes sont nécessaires ? Pouvait-on le prévoir ?
5. Télécharger le fichier DICHOTOMIE14ELEVE.ALG sur mon site et compléter l'algorithme de Dichotomie pour cette fonction avec `Algobox`.
6. Tester cet algorithme en partant de $a = -2$ et $b = -1$ pour obtenir un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0,001$.
7. Compléter l'algorithme pour qu'il affiche en sortie le nombre d'étapes nécessaires.
8. Justifier que l'équation $(E_2)$ : $f(x) = 10$ possède une unique solution $\beta$ sur $]-\infty;+\infty[$ et déterminer le plus grand entier relatif $n$ tel que $n < \beta < n+1$.
   Modifier le programme DICHOTOMIE14ELEVE.ALG pour qu'il détermine un encadrement de $\beta$ d'amplitude saisie par l'utilisateur avec la méthode par dichotomie. Enregistrer le nouveau programme sous le nom DICHOTOMIE14ELEVE2.ALG.

**Algorithme 1** *Dichotomie*

**Entrée(s)** $a, b, precision$
  **tant que** $|a-b| >$ precision **faire**
    $\dfrac{a+b}{2} \to m$
    **si** $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
      $m \to b$
    **sinon**
      $m \to a$
    **fin du si**
  **fin du tant que**
**Sortie(s)** $a, b$

| Etape | $a$ | $b$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| … | | | |
| … | | | |
| … | | | |
| … | | | |

**Exercice 2** *Etude d'une fonction g*

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-6x-\dfrac{10}{x}\right)$.

1. Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et démontrer que $g'$ est du même signe que la fonction $f$ étudiée dans la partie A.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction $g$.
3. Dresser le tableau de variation complet de $g$ en justifiant les calculs de limites aux bornes.
4. Justifier que l'équation $(E_2)$ : $g(x)=0$ possède une unique solution dans $]0\,;+\infty[$ et déterminer une valeur approchée de cette solution à 0,1 près avec une méthode par balayage. (Détailler les étapes).

## 2 Suites récurrentes

**Exercice 3**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n}.$$

1. Compléter l'algorithme 2 pour qu'il retourne le terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$ :

   **a.** Programmer cet algorithme avec Algobox et donner une valeur approchée à $10^{-4}$ près du résultat qu'il affiche lorsque l'on choisit $n=3$.

   **b.** Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de $n$.

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur affichée | 1,414 2 | 1,957 1 | 1,998 6 | 1,999 9 | 1,999 9 |

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(u_n)$ ?

**Algorithme 2**

| | |
|---|---|
| Variables : | $n$ est un entier naturel |
| | $i$ est un entier naturel |
| | $u$ est un réel positif |
| Initialisation : | Demander la valeur de $n$ |
| | Affecter à $u$ la valeur 1 |
| Traitement : | Pour $i$ variant de 0 à ... : |
| | \| Affecter à $u$ la valeur ... |
| | Fin de Pour |
| Sortie : | Afficher $u$ |

**2.** **a.** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ sur $[0;2]$.

**b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n < u_{n+1} \leqslant 2$.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

## Exercice 4

Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

**PARTIE A**

Compléter l'algorithme 3 pour qu'il calcule les termes de rang $n$ (saisi par l'utilisateur) des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ : Programmer cet algorithme avec Algobox puis l'exécuter en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

| $K$ | $W$ | $U$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

**Algorithme 3**

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $N$ est un entier |
| | $U, V, W$ sont des réels |
| | $K$ est un entier |
| **Début :** | Affecter 0 à $K$ |
| | Affecter 2 à $U$ |
| | Affecter 10 à $V$ |
| | Saisir $N$ |
| | Tant que $K < N$ |
| | Affecter ········· à $K$ |
| | Affecter ········· à $W$ |
| | Affecter ········· à $U$ |
| | Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à $V$ |
| | Fin tant que |
| | Afficher $U$ |
| | Afficher $V$ |
| **Fin** | |

**PARTIE B**

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   **b.** Pour tout entier naturel $n$ on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel $n$, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que la suite $(v_n)$ est décroissante.

   **b.** Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel $n$ on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   **c.** En déduire que tes suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

3. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont la même limite.

4. Montrer que la suite $(t_n)$ définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est $\frac{46}{7}$.

**Corrigé 1** *exo 2*

Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

**PARTIE A**

**Variables :** $N$ est un entier
$U, V, W$ sont des réels
$K$ est un entier
**Début :** Affecter 0 à $K$
Affecter 2 à $U$
Affecter 10 à $V$
Saisir $N$
Tant que $K < N$
  Affecter $K+1$ à $K$
  Affecter $U$ à $W$
  Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à $U$
  Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à $V$
Fin tant que
Afficher $U$
Afficher $V$
**Fin**

État des variables :

| $K$ | $W$ | $U$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 0 | — | 2 | 10 |
| 1 | 2 | 14/3 | 8 |
| 2 | 14/3 | 52/9 | 43/6 |

**PARTIE B**

**1.** **a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

**b.** Pour tout entier naturel $n$ on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel $n$, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

**2.** **a.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout $n$, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$ ; on peut en déduire que pour tout $n$, $w_n > 0$ et donc que, pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite $(u_n)$ est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n$.

Donc la suite $(v_n)$ est décroissante.

**b.** On a vu que, pour tout $n$, $w_n > 0$ ; donc, pour tout $n$, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite $(v_n)$ est décroissante donc, pour tout $n$, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \geqslant 10$.

Pour tout entier naturel $n$, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ eqslant v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10$.

La suite $(u_n)$ est croissante donc pour tout $n$, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel $n$, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2$.

**c.** La suite $(u_n)$ est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell_u$.

La suite $(v_n)$ est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite $(v_n)$ est convergente vers un réel $\ell_v$.

**3.** La suite $(w_n)$, définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$ ; donc on peut dire que la suite $(w_n)$ est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$ ; les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont donc la même limite qu'on appelle $\ell$.

**4.** $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite $(t_n)$ est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite $(t_n)$ est constante, pour tout $n$, $t_n = t_0 = 46$ ; la suite $(t_n)$ est donc convergente vers 46.

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont toutes les deux convergentes vers $\ell$ donc la suite $(t_n)$ définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.

La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

La limite commune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est donc $\dfrac{46}{7}$.