1 Algorithme de dichotomie

Exercice 1 *Etude d'une fonction auxiliaire f et de solutions approchées d'équations par dichotomie*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant les calculs de limites aux bornes.
3. Justifier que l'équation (E_1) : $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-2;-1]$ et que c'est même l'unique solution de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$.
4. Appliquer à la main l'algorithme de dichotomie (voir Algorithme 1) avec les valeurs initiales $a = -2$ et $b = -1$ pour déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,1$. On complétera le tableau en Annexe 2 avec les valeurs des variables en entrée de la boucle Tant Que.
   Combien d'étapes sont nécessaires ? Pouvait-on le prévoir ?
5. Télécharger le fichier DICHOTOMIE14ELEVE.ALG sur mon site et compléter l'algorithme de Dichotomie pour cette fonction avec `Algobox`.
6. Tester cet algorithme en partant de $a = -2$ et $b = -1$ pour obtenir un encadrement de α d'amplitude $0,001$.
7. Compléter l'algorithme pour qu'il affiche en sortie le nombre d'étapes nécessaires.
8. Justifier que l'équation (E_2) : $f(x) = 10$ possède une unique solution β sur $]-\infty;+\infty[$ et déterminer le plus grand entier relatif n tel que $n < \beta < n+1$.
   Modifier le programme DICHOTOMIE14ELEVE.ALG pour qu'il détermine un encadrement de β d'amplitude saisie par l'utilisateur avec la méthode par dichotomie. Enregistrer le nouveau programme sous le nom DICHOTOMIE14ELEVE2.ALG.

Algorithme 1 *Dichotomie*

Entrée(s) $a, b, precision$
  tant que $|a-b| >$ precision **faire**
    $\frac{a+b}{2} \to m$
    si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**
      $m \to b$
    sinon
      $m \to a$
    fin du si
  fin du tant que
Sortie(s) a, b

Etape	a	b	m
1			
2			
…			
…			
…			
…			

Exercice 2 *Etude d'une fonction g*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-6x-\dfrac{10}{x}\right)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et démontrer que g' est du même signe que la fonction f étudiée dans la partie A.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction g.
3. Dresser le tableau de variation complet de g en justifiant les calculs de limites aux bornes.
4. Justifier que l'équation (E_2) : $g(x)=0$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$ et déterminer une valeur approchée de cette solution à 0,1 près avec une méthode par balayage. (Détailler les étapes).

2 Suites récurrentes

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n}.$$

1. Compléter l'algorithme 2 pour qu'il retourne le terme de rang n de la suite (u_n) :

   a. Programmer cet algorithme avec Algobox et donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'il affiche lorsque l'on choisit $n=3$.

   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Algorithme 2

Variables :	n est un entier naturel
	i est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 0 à … :
	| Affecter à u la valeur …
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

2. **a.** Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ sur $[0\,;2]$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} \leqslant 2$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice 4

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

Compléter l'algorithme 3 pour qu'il calcule les termes de rang n (saisi par l'utilisateur) des suites (u_n) et (v_n) : Programmer cet algorithme avec Algobox puis l'exécuter en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Algorithme 3

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter ········· à K
	Affecter ········· à W
	Affecter ········· à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

PARTIE B

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Corrigé 1 *exo 2*

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

PARTIE A

Variables : N est un entier
U, V, W sont des réels
K est un entier
Début : Affecter 0 à K
Affecter 2 à U
Affecter 10 à V
Saisir N
Tant que $K < N$
    Affecter $K + 1$ à K
    Affecter U à W
    Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
    Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
Fin tant que
Afficher U
Afficher V
Fin

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. a. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b. On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \geqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ eqslant v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2$.

c. La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.

La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.