Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$$

On note M_n le point d'affixe z_n et $z_n = a_n + \mathrm{i} b_n$ où a_n et b_n sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z_n.

1. Calculer les écritures algébriques de z_1 et z_2.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2}$.
   Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3. Compléter les lignes 12 et 13 de l'algorithme suivant pour que les valeurs des variables a et b affichées en sortie soient respectivement la partie réelle a_n et la partie imaginaire b_n du nombre complexe z_n.

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     n EST_DU_TYPE NOMBRE
5     k EST_DU_TYPE NOMBRE
6   DEBUT_ALGORITHME
7     LIRE n
8     a PREND_LA_VALEUR 2
9     b PREND_LA_VALEUR 0
10    POUR k ALLANT_DE 1 A n
11      DEBUT_POUR
12      a PREND_LA_VALEUR .......
13      b PREND_LA_VALEUR .......
14      FIN_POUR
15    AFFICHER a
16    AFFICHER b
17  FIN_ALGORITHME
```

4. Démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$z_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

5. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \left|z_n\right|$ est géométrique et converge vers 0.

6. Justifier qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, le point M_n appartient au disque de centre O et de rayon 10^{-4}.
   Déterminer la valeur de p.